

# Cuprins

		Proba a/ Pag	Proba b/ Pag	Test a/ Pag	Test b/ Pag
Cum poate fi utilizată această carte?	3				
O invitație pentru elevi	4				
<b>Unitatea de învățare A1: Mulțimi de numere reale</b>					<b>5</b>
1. Mulțimi de numere. Relația $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	5	P1/ 5 P2/ 7	P1/ 6 P2/ 8		
2. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor; aproximări. Modulul unui număr real	9	P3/ 9	P3/ 10		
3. Intervale numerice în $\mathbb{R}$	11	P4/ 11	P4/ 12		
4. Operații cu numere raționale. Unități de măsură	13	P5/ 13	P5/ 14		
5. Operații cu numere reale	15	P6/ 15	P6/ 16		
6. Ecuații de forma $ax + b = 0$ , unde $a$ și $b$ sunt numere reale	17	P7/ 17	P7/ 18		
7. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ( $\leq, <, \geq$ ), unde $a$ și $b \in \mathbb{R}$	19	P8/ 19	P8/ 20		
Unitatea de învățare A1. Sintează	21			T1/23	T1/24
<b>Unitatea de învățare A2: Operații cu numere reale. Calcul algebric</b>					<b>25</b>
1. Operații cu numere reale: adunare/scădere	25	P9/ 25	P9/ 26		
2. Operații cu numere reale: înmulțirea	27	P10/ 27	P10/ 28		
3. Rapoarte de numere reale. Împărțirea numere reale	29	P11/ 29	P11/ 30		
4. Puteri și radicali	31	P12/ 31	P12/ 32		
5. Folosirea literelor în calcule	33	P13/ 33	P13/ 34		
6. Formule de calcul prescurtat: pătratul unui binom	35	P14/ 35	P14/ 36		
7. Formule de calcul prescurtat: produs de sumă prin diferență	37	P15/ 37	P15/ 38		
8. Descompuneri în factori: factor comun	39	P16/ 39	P16/ 40		
9. Descompuneri în factori: formule de calcul prescurtat	41	P17/ 41 P18/ 43	P17/ 42 P18/ 44		
10. Rapoarte algebrice: amplificare și simplificare	45	P19/ 45	P19/ 46		
11. Operații cu rapoarte algebrice	47	P20/ 47	P20/ 48		
12. Utilizarea rapoartelor algebrice în calcule. Ordinea efectuării operațiilor	49	P21/ 49	P21/ 50		
Unitatea de învățare A2. Sintează	51			T2/ 53	T2/ 54

		Proba a/ Pag	Proba b/ Pag	Test a/ Pag	Test b/ Pag
<b>Unitatea de învățare G1: Puncte, drepte, plane, corpuri geometrice. Poziții relative</b>					
<b>55</b>					
1. Puncte, drepte, plane: convenții de desen și notație	55	P22/ 55	P22/ 56		
2. Determinarea drepte. Determinarea planului	57	P23/ 57	P23/ 58		
3. Piramida: reprezentare, elemente, desfășurări	59	P24/ 59	P24/ 60		
4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu	61	P25/ 61	P25/ 62		
5. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan	63	P26/ 63	P26/ 64		
6. Pozițiile relative a două plane în spațiu. Teoreme de paralelism	65	P27/ 65 P28/ 67	P27/ 66 P28/ 68		
7. Prisma: reprezentare; elemente; desfășurări	69	P29/ 69	P29/ 70		
8. Secțiuni paralele cu baza în corpuri geometrice. Trunchiul de piramidă	71	P30/ 71	P30/ 72		
Unitatea de învățare G1. Sintează	73			T3/ 75	T3/ 76
<b>Unitatea de învățare G2: Perpendicularitate în spațiu</b>					
<b>77</b>					
1. Măsura unghiului a două drepte în spațiu	77	P31/ 77	P31/ 78		
2. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan	79	P32/ 79 P33/ 81	P32/ 80 P33/ 81		
3. Înălțimea unei piramide. Piramida regulată	83	P34/ 83	P34/ 84		
4. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prisme, prisma dreaptă	85	P35/ 85	P35/ 86		
5. Cilindrul circular drept, conul, trunchiul de con: reprezentare, elemente, secțiuni paralele cu baza	87	P36/ 87	P36/ 88		
6. Proiecții ortogonale de puncte, de segmente de dreaptă și de drepte pe un plan	89	P37/ 89	P37/ 90		
7. Unghiul dintre o dreaptă și un plan	91	P38/ 91	P38/ 92		
8. Diedru, unghi plan corespunzător unui diedru	93	P39/ 93	P39/ 94		
9. Unghiul a două plane	95	P40/ 95	P40/ 96		
10. Plane perpendiculare	97	P41/ 97	P41/ 98		
11. Teorema celor trei perpendiculare	99	P42/ 99	P42/ 100		
12. Teorema celor trei perpendiculare; reciproce	101	P43/ 101	P43/ 102		
13. Calculul distanțelor în spațiu	103	P44/ 103	P44/ 104		
Unitatea de învățare G2. Sintează	105			T4/ 107	T4/ 108
<b>Test DoWin</b>					<b>109</b>
<b>Teste pentru Evaluarea Națională</b>					<b>111</b>
<b>Rezolvări</b>					<b>127</b>

## Cum poate fi utilizată această carte?

### Câteva sugestii pentru profesori

*Cartea activă* este un instrument util, inedit, pentru dezvoltarea și evaluarea competențelor elevilor în cadrul orelor de clasă. Cartea urmărește consecvent programa de matematică în uz, detaliată în planificarea calendaristică ce poate fi descărcată de pe [www.editurasigma.ro](http://www.editurasigma.ro).

Pentru fiecare lecție sunt alocate două sau patru pagini, după cum este proiectată să se desfășoare în una sau două ore de clasă. După prezentarea unor elemente de teorie însoțite de exemple ce trebuie completate, fiecare lecție continuă cu exerciții variate, grupate pe patru niveluri de dificultate. Fiecare unitate de învățare a cărții mai conține: un exemplu de redactare, câteva elemente ce țin de istoria matematicii, probleme recapitulative, câte două teste recapitulative și o fișă care propune explorarea unor probleme interesante sub forma unui mini-proiect.

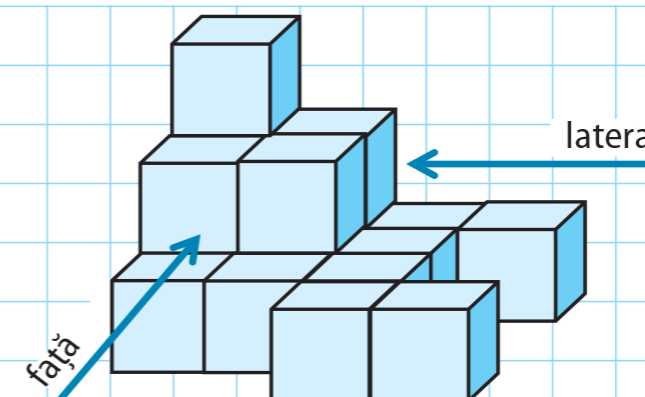
*Cartea activă* propune profesorilor să dedice în cadrul orei un timp de 10-20 de minute în care fiecare elev să rezolve o probă de evaluare prin care să afle în ce măsură a înțeles și poate opera cu conceptele nou predate. Elevii pot alege una dintre cele două probe de evaluare: *Proba a* – mai simplă, sau *Proba b* – un pic mai dificilă. La fiecare probă există în carte și un spațiu liber, în care profesorul poate propune elevilor un exercițiu suplimentar-surpriză (eventual indicat tot dintre exercițiile culegerii). Unele enunțuri conțin un parametru sub forma unei casete , în care elevul trebuie să insereze o valoare pentru a putea rezolva exercițiul respectiv.

Punctajul, alcătuit după nivelul de dificultate, este următorul: exercițiile *Probei a* au 1, 1, respectiv 2 puncte, iar exercițiile *Probei b* au 2, 2, respectiv 3 puncte. În plus, se poate adăuga fiecărei probe și punctajul exercițiului-surpriză. Profesorul poate decide să evalueze prin sondaj, în fiecare oră, câțiva dintre elevii clasei, solicitând acestora fișa cu proba lucrată (*a* sau *b*), care poate fi decupată. Aplicarea experimentală a cărții a arătat că, utilizând-o sistematic la clasă, elevii ajung să urmărească cu atenție sporită explicațiile profesorului, ca să poată rezolva cu succes cerințele unei probe în cadrul aceleiași ore.

Cu punctajul total realizat la fiecare probă, elevii pot completa sistematic un grafic de progres. Se creează astfel posibilitatea de a urmări evoluția achizițiilor fiecărui elev pe parcursul anului școlar și identificarea dificultăților pe care acesta le întâmpină în învățare. Cartea activă ajută fiecare elev să avanseze în ritmul său propriu, dezvoltându-și, cu această ocazie, încrederea că matematica – știința gândirii – este un joc interesant și accesibil. Elevul care participă la propria învățare și evaluare este mai atent în oră și, ca urmare, valorifică mai bine timpul și spațiul școlar.

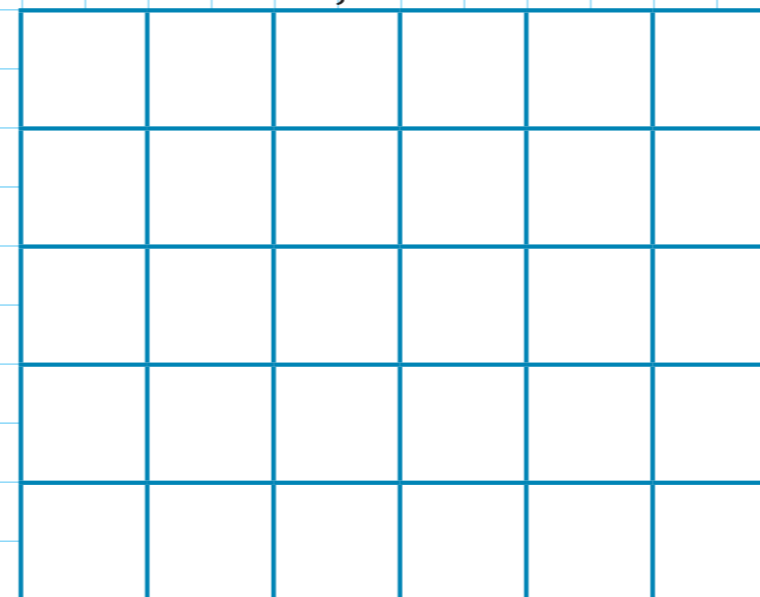
## Să folosim activ paginile cărții!

Construcția din imaginea alăturată este alcătuită din cubulețe identice.

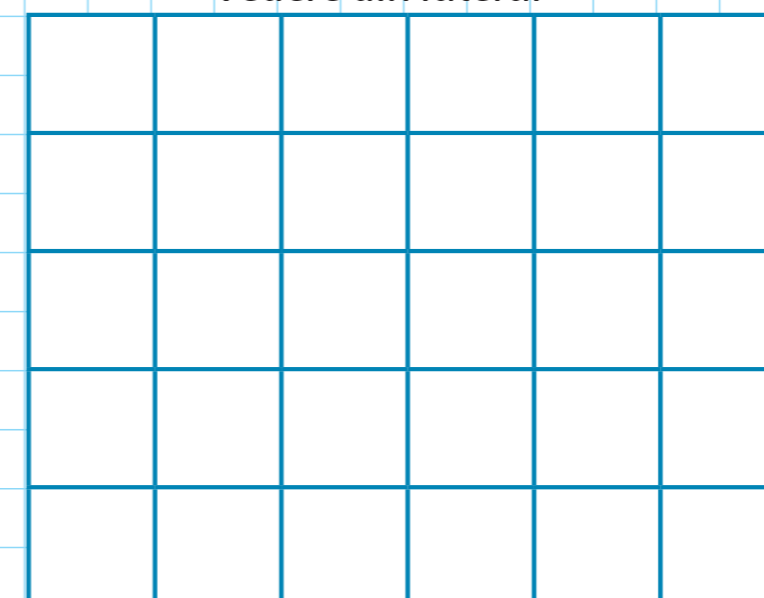


Pe caroiajele de mai jos, desenează cum se vede această construcție din față, respectiv din lateral.

Vedere din față



Vedere din lateral



### 1. Mulțimi de numere. Relația $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

#### Recapitulez și exersez\*

Mulțimi de numere

0; 14; 203; ;  sunt numere naturale.  
 142; -57; 0; ;  sunt numere întregi.  
 1,3;  $\frac{4}{5}$ ; -7; ;  sunt numere raționale.  
 $\sqrt{2}$ ; -1,(6); 15; ;  sunt numere reale.

Forme echivalente de scriere a unui număr

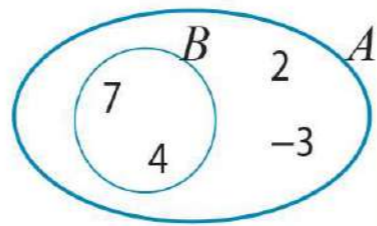
$\frac{4}{3} = \frac{12}{9} = 1\frac{\square}{9} = 1,(\square)$  fracție zecimală periodică simplă  
 $1,3(5) = 1 + \frac{35-\square}{90} = \square$  fracție zecimală periodică mixtă

Relații

- ◆ **Apartenență**
- ◆ **Incluziune**

Dacă  $A = \{2; -3; 4; 7\}$  și  $B = \{4; 7\}$ , atunci:

$2 \in A$ ;  $1 \square A$ ;  $\square \in A$ ;  $\square \notin A$ .  
 $\{4; \square\} \subset \{2; -3; \square; 7\}$ ;  $B \square A$   
 $\{0; 1; 2\} \not\subset \{0; 1; \square; \square\}$



- ◆ **Divizibilitate**

$255 = 12 \cdot 21 + \square$ ; de aceea, 255 nu este divizibil cu 12.  
 255 are ultima cifră 5: deducem că 255 este divizibil cu .  
 Suma cifrelor lui 255 este ; deducem că 255 este multiplu de .

#### Explorez, aplic, rezolv

- Subliniază numerele naturale pare: 1 352, 1 723, 756, 1 234, 458, 7 977.
- Subliniază numerele întregi divizibile cu 3: 123, -1 136, 5 499 081, -9 980 863.
- Subliniază numerele întregi divizibile cu 5: 72 325, -423 750, 897 984, -241 600.
- Scrie mulțimea divizorilor naturali pentru: **a)** 23; **b)** 30; **c)** 24; **d)** 36.
- Scrie toți multiplii pozitivi ai lui 6 mai mici decât 50.

\* Pentru o recapitulare eficientă, completează casetele!

#### Am înțeles?

Data \_\_\_\_\_

1a  
Proba



1 Marchează **A** sau **F** dacă propoziția este adevărată, respectiv falsă:

- a)  $\frac{0}{3} \in \mathbb{N}$        b)  $-\sqrt{18} \in \mathbb{Q}$    
 c)  $-4,3 \in \mathbb{Q}$        d)  $2,(3) \in \mathbb{R}$

2 a) 11,(36) se scrie sub formă fracționară

b)  $\frac{-7}{4}$  se scrie sub formă zecimală

3 Determină:

- a) c.m.m.d.c. al numerelor 240 și ;  
 b) c.m.m.m.c. al numerelor 150 și 36.



Exercițiu suplimentar, notițe, calcule

#### Am învățat și am recapitulat:

- ✓ recunoașterea elementelor mulțimilor de numere, forme echivalente de scriere a unui număr rațional;
- ✓ calculul divizorilor și multiplilor comuni.

Autoevaluare



Nume:

Clasa a VIII-a

## Explorez... surprize matematice

- 3** Ana a scris pătratele unor numere naturale consecutive și a observat o regulă de creștere a acestora:

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2$	0	1	4	9	16	25	36

Completează pe tabelul de mai sus calculele care arată relațiile cu ultimele două numere.

Cu cât diferă pătratul lui 99 de pătratul lui 100?

- 4** Din tabelul scris de Ana și din relațiile deduse de ea, obținem următoarele egalități:

$$1 = 1^1$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Observă și completează!

Următoarea egalitate de acest tip este:

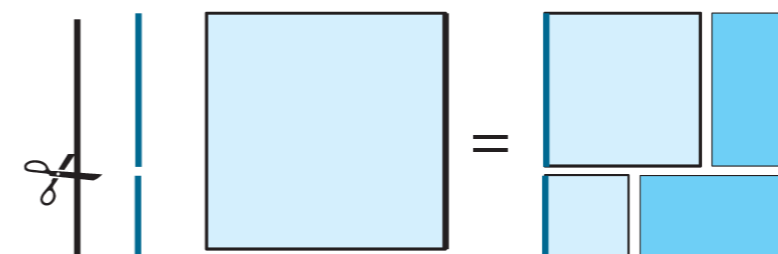
Putem deduce că:  $1 + 3 + 5 + \dots + 1001 = \dots$

## Explorez... povești istorice

### Formule de calcul prescurtat

Unele formule de calcul din această unitate au o istorie fascinantă. În particular, diferența de pătrate și pătratul unui binom au fost cunoscute și aplicate de foarte mult timp. Matematicienii din Grecia Antică cunoșteau formula pătratului de binom. În celebrul tratat de geometrie "Elementele", scris de Euclid, apare următoarea formulare:

Dacă un segment este tăiat la întâmplare, aria pătratului construit pe întregul segment este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe cele două părți, plus de două ori aria dreptunghiului format de segmente.



În limbaj cotidian, formularea de mai sus spune că  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ , adică exprimă geometric formula pătratului de binom.

Formularea de mai sus este explicabilă prin faptul că, pentru matematicienii din Grecia Antică, "numere" erau doar numerele naturale, adică 1, 2, 3, ...; ceea ce noi denumim acum numere reale erau gândite ca mărimi geometrice și rezultau ca urmare a considerării unor rapoarte (implicit, prin măsurare).

Formula diferenței de pătrate a fost folosită chiar și mai de timpuriu, de către babilonieni. Sistemul lor de numerație, ce utiliza numere în baza 60, nu permitea efectuarea rapidă a înmulțirilor. Babilonienii aveau însă tabele cu diverse calcule, în particular tabele cu pătratele numerelor naturale de la 1 la 59, așa cum arată tăblițele de lut găsite la Senkerah, în 1854. Ei foloseau aceste tabele și formula care, în limbaj

modern, s-ar scrie  $a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$ , pentru a efectua înmulțiri.

### Verifică dacă ai înțeles!

**1.** Demonstrează formula:  $a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ .

- 2.** Pentru a înțelege cum calculau babilonienii produsul a două numere naturale, Ema a alcătuit un tabel de pătrate perfecte.

$n$	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$n^2$	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841

Folosește tabelul Emei pentru a calcula următoarele produse, efectuând doar scăderi:  $49 \times 7$ ;  $49 \times 9$ ;  $45 \times 5$ .

22b

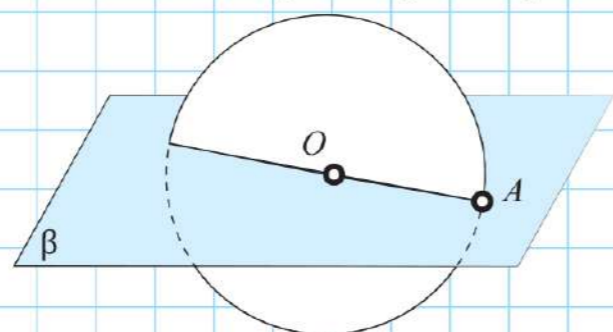
Proba



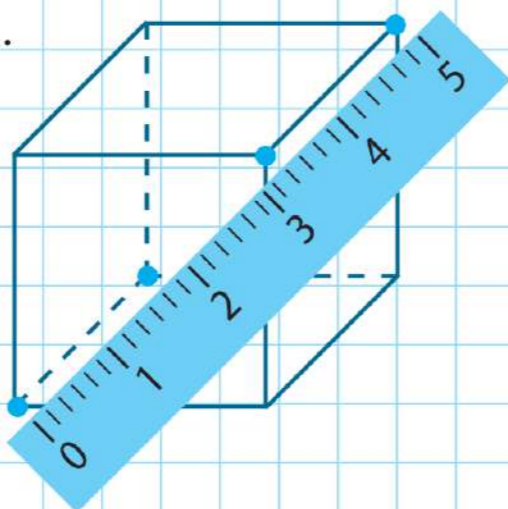
Știu să rezolv?

Data \_\_\_\_\_

- 1 Centrul  $O$  și punctul  $A$  ale unui cerc se află în planul  $\beta$ . Demonstrează că punctul diametral opus lui  $A$  pe acest cerc se află și el în planul  $\beta$ .



- 2 Tic a reprezentat un cub și a constatat, pe desenul realizat, că patru dintre vârfuri sunt coliniare. Sunt aceste vârfuri coliniare și în realitate, pe cub? Justifică răspunsul tău.



- 3 Adevărat sau fals? Marchează căsuța corespunzătoare! Dacă punctele  $M$  și  $N$  aparțin planului  $p$ , iar  $D$  este un alt punct astfel că  $MN = 5$  cm,  $MD = 8$  cm,  $ND = 3$  cm, atunci putem deduce că  $D \in p$ .

A F **Am învățat și am recapitulat:**

- ✓ utilizarea convențiilor de desen și notație;
- ✓ elementele unui cerc; puncte diametral opuse.

Autoevaluare

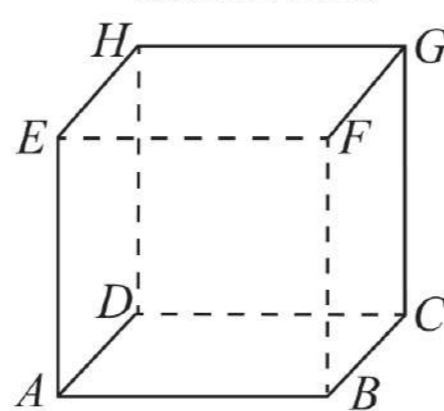


Nume: \_\_\_\_\_

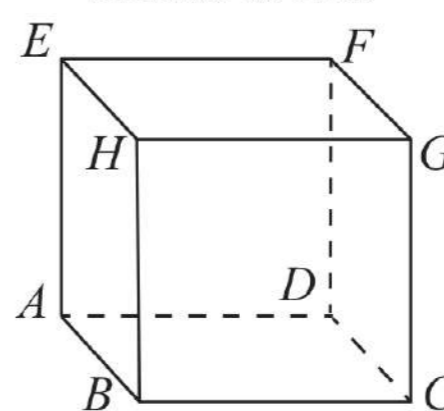
Clasa a VIII-a 

4. Reprezintă printr-un desen: planul  $q$ , punctele  $A$  și  $B$  din planul  $q$  și dreapta  $AC$ , care nu este inclusă în planul  $q$ .
5. Reprezintă prin desen: planul  $\alpha$ , dreapta  $MN$  inclusă în acest plan și dreapta  $NP$ , care nu este inclusă în planul  $\alpha$ . Notează corespunzător elementele figurii.
6. Observă desenele realizate de elevi pentru cubul  $ABCDEFGH$  și decide dacă au fost respectate convențiile de desen și de notație.

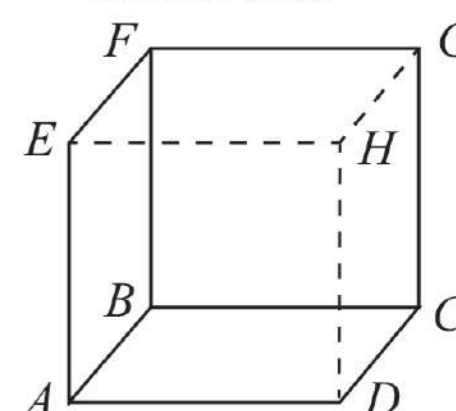
Desenul Anei:



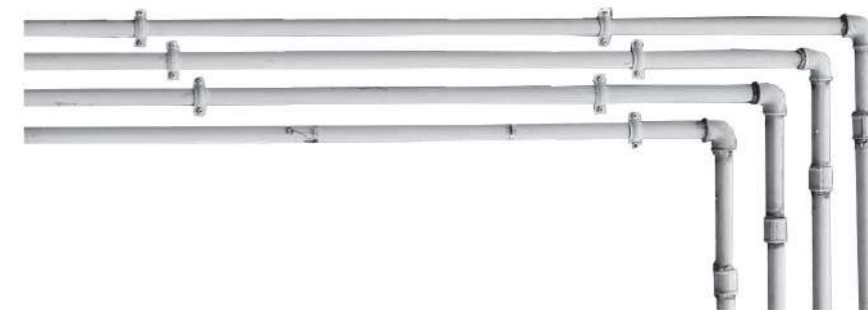
Desenul lui Geo:



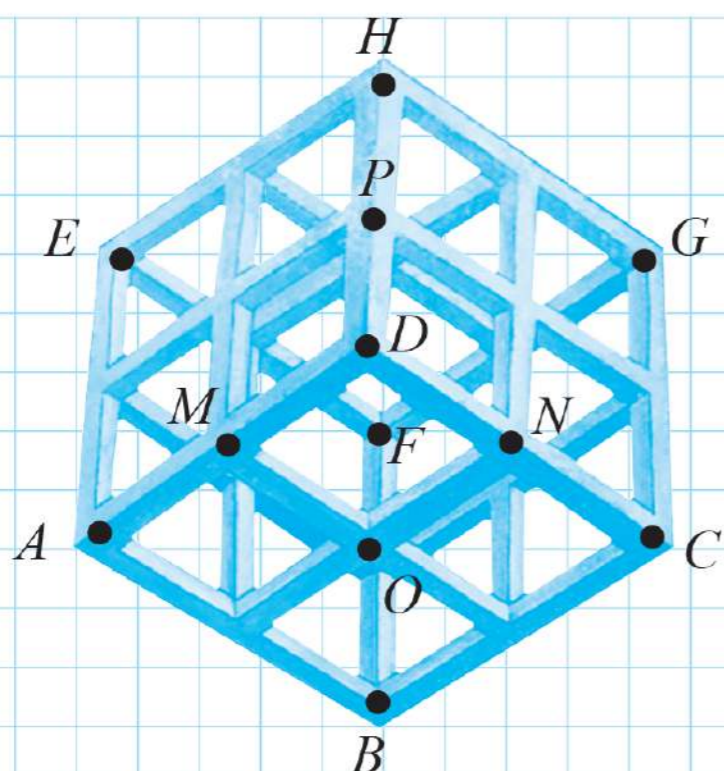
Desenul Lizei:



7. Planul  $p$  conține punctele necoliniare  $A, B$  și  $C$ , iar  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ .
- Justifică dacă  $M \in p$ .
  - Notăm cu  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ . Demonstrează că  $G \in p$ .
8. Domnul Popescu și-a renovat apartamentul. Explică de ce a fost suficient ca fiecare bucată a plintei de pe marginea parchetului să fie fixată în două șuruburi, pentru ca aceasta să se „lipească” perfect de perete.
9. Câteva țevi de apă, în formă de L, sunt montate pe un perete. Justifică de ce, pentru a rămâne fixată pe perete, este suficient ca fiecare țevă să fie prinsă prin 3 coliere.



## Explorez... surprize matematice



7 Arată că dreptele  $EO$  și  $CG$  sunt concurente.

8 Ce lungime are proiecția segmentului  $PF$  pe planul  $(OMN)$ ?

9 Stabilește poziția dreptei  $OH$  față de planul  $(MNP)$ .

10 Calculează măsura unghiului planelor  $(PMO)$  și  $(ABC)$ .

11 Calculează tangenta unghiului format de dreapta  $PO$  cu planul  $(EFG)$ .

Compune și rezolvă alte probleme folosind configurația de cuburi de mai sus.

Autoevaluare



Nume:

Clasa a VIII-a

## Explorez... scheme de gândire

Pentru succesul tău în rezolvarea problemelor, completează schemele, apoi aplică raționamentele în rezolvarea problemelor de mai jos.

Tehnici de lucru pentru demonstrarea paralelismului	Două drepte sunt paralele dacă:	O dreaptă este paralelă cu un plan dacă:	Două plane sunt paralele dacă:
	<ul style="list-style-type: none"> <li>sunt fiecare dintre ele paralele cu o a treia dreaptă</li> <li>sunt dreptele de intersecție a două plane paralele cu</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>dreapta este paralelă cu o dreaptă din plan</li> <li>dreapta este conținută .....</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>există două drepte concurente din primul plan, paralele cu al doilea plan</li> <li>sunt fiecare dintre ele perpendiculare pe</li> </ul>

Tehnici de lucru pentru demonstrarea perpendicularității	Două drepte sunt perpendiculare dacă:	O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă:	Două plane sunt perpendiculare dacă:
	<ul style="list-style-type: none"> <li>una dintre ele este perpendiculară pe un plan ce conține cealaltă dreaptă</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>dreapta este perpendiculară pe două drepte concurente din planul dat</li> <li>dreapta este paralelă cu o dreaptă ..... pe plan</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt</li> <li>măsura unuia dintre unghiurile diedre formate de cele două plane este .....</li> </ul>

Gândind la schemele de mai sus, problemele următoare se rezolvă mai ușor!

- O dreaptă este paralelă cu o muchie a unui cub. Cu câte alte muchii ale cubului mai este ea paralelă?
- În tetraedrul  $MATE$  punctele  $B, C, D, F, G, H$  sunt mijloacele muchiilor:  $AM, AT, TE, ME, MT$ , respectiv  $AE$ .
  - Demonstrază că  $BCDF$  și  $FGCH$  sunt paralelograme.
  - Identifică un alt paralelogram, analog celor anterioare.
  - Arată că dreptele  $BD, CF, GH$  sunt concurente.

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

5p

1. Patru elevi calculează media aritmetică a numerelor  $6\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{12}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $-22\sqrt{3}$  și obțin rezultatele înregistrate în tabelul alăturat. Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media aritmetică a celor trei numere este:

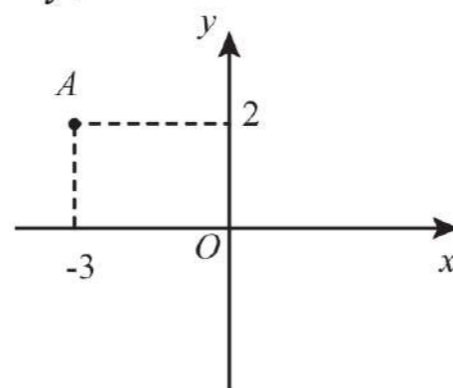
- A) Alin
- B) Dana
- C) Vlad
- D) Ioana

Alin	$-12\sqrt{3}$
Dana	$-3\sqrt{3}$
Vlad	$-4\sqrt{3}$
Ioana	$3\sqrt{3}$

5p

2. În figura alăturată este reprezentat punctul  $A$ , într-un sistem de axe perpendiculare  $xOy$ . Simetricul punctului  $A$  față de originea  $O$  a sistemului  $xOy$ , are coordonatele:

- A) (3, 2)
- B) (-3, -2)
- C) (3, -2)
- D) (-3, 2)



5p

3. Patru elevi au scris pe caiet cele mai mici 5 numere naturale prime. În tabelul de mai jos sunt prezentate răspunsurile lor. Dintre cei patru elevi, cel care a scris corect primele 5 numere prime, este:

- A) Mihai
- B) Daniela
- C) Andreea
- D) Oana

Mihai	0, 1, 3, 5, 7
Daniela	1, 2, 3, 5, 7
Andreea	2, 3, 5, 7, 9
Oana	3, 5, 7, 9, 11

5p

4. Dacă  $|x-3| < 1$ , atunci  $x$  aparține intervalului:

- A) (2, 3)
- B) (-1, 3)
- C) (2, 4)
- D) (1, 3)

5p

5. La un concurs de matematică au participat 25 de elevi. Situația punctajelor obținute este dată procentual în tabelul alăturat. Conform tabelului, numărul de elevi care au obținut cel puțin 80 de puncte este egal cu:

Număr de puncte	20-49	50-79	80-99	100
Procentajul	8%	28%	48%	16%

- A) 12
- B) 14
- C) 16
- D) 15

5p

6. Daria afirmă că  $15 - \frac{15}{16} = 15 \cdot \frac{15}{16}$ . Afirmatia Dariai este:

- A) adevărată
- B) falsă